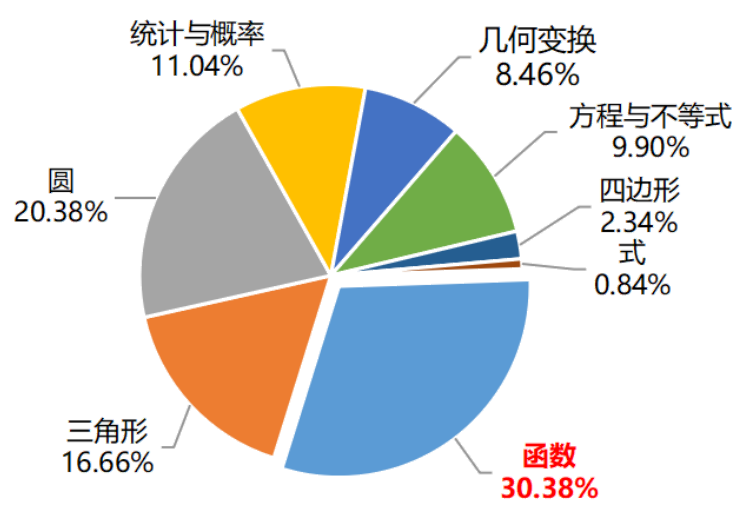


第1讲 二次函数基础

二次函数是人教版教材第二十二章的内容，在了解二次函数性质的基础上，还会与我们之前所学的代数及几何进行综合。本模块《二次函数进阶》，包括二次函数的基本概念及解析式与几何变换，重点涉及二次函数图象与系数关系，此外还会讲解二次函数的实际应用。

本模块难度部分偏难，其余中等，在对基础知识夯实的基础上，会进行性质的综合利用，本模块分为二次函数基础、二次函数图象专题（一）、二次函数图象专题（二）、二次函数实际问题4讲内容，加油站与讲义内容完全对照，帮助学生巩固薄弱点和易错点。

知己知彼



知识点	难度	考频
二次函数的概念	★	低
二次函数的解析式	★★	高
二次函数的几何变换	★★★	中
二次函数图象与系数的关系	★★★★	高
二次函数的实际应用	★★★	高

一、二次函数的相关概念

1. 二次函数的概念

一般地，形如 $y = ax^2 + bx + c$ (a, b, c 是常数, $a \neq 0$) 的函数叫做二次函数。

其中， x 是自变量， ax^2 叫做二次项， bx 是一次项， c 为常数项； a 为二次项系数， b 为一次项系数。

判断函数是否为二次函数的方法：

- ①含有 一 个变量，且自变量的最高次数为 2；
- ②二次项系数不等于 0；
- ③等式两边都是 整式。

【备注】 二次函数要注意 a 、 b 、 c 为常数，且 $a \neq 0$ ；等式的右边最高次数为 2，可以没有一次项和常数项，但不能没有二次项。
通常情况下，自变量 x 的取值范围是全体实数。

🧐 举个“栗子”

栗子1

1. 2019~2020学年9月天津河北区天津市汇森中学初三上学期月考第13题3分 ★★

若 $y = (m^2 + m)x^{m^2 - 2m - 1}$ 是二次函数，则 m 的值为 _____。

【答案】 3

【解析】 $\because y = (m^2 + m)x^{m^2 - 2m - 1}$ 是二次函数，
 $\therefore m^2 - 2m - 1 = 2$ 且 $m^2 + m \neq 0$ ，
解得 $m = 3$ 或 $m = -1$ 且 $m \neq 0$ ， $m \neq -1$ ，
综上， $m = 3$ 。
故答案为 3。

【标注】 【知识点】利用二次函数的定义求参数的值

栗子2

2. 2019~2020学年9月天津南开区天津市第二十五中学初三上学期月考第26题3分 ★★

若二次函数 $y = (m - 2)x^2 + 2x + (m^2 - 4)$ 的图象经过原点，则 $m =$ _____。

【备注】 函数上的点代入到解析式中一定成立，因此直接将原点代入即可

【答案】 -2

【解析】 二次函数 $y = (m - 2)x^2 + 2x + (m^2 - 4)$ 过原点，
故 $(0, 0)$ 直接代入二次函数得： $m^2 - 4 = 0$ ，
解得 $m = \pm 2$ ，

又二次项系数 $m - 2 \neq 0$,

$\therefore m \neq 2$.

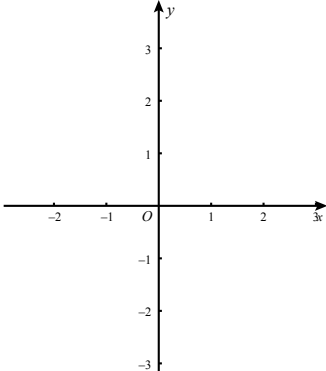
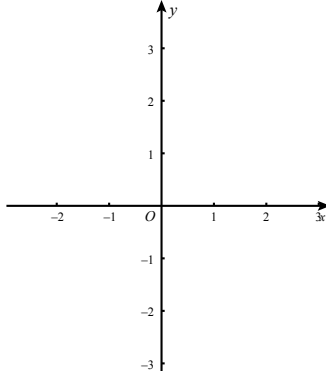
故 $m = -2$.

【标注】【能力】运算能力

【知识点】点在二次函数图象上

2. 二次函数的基本性质

 二次函数一般式

$y = ax^2 + bx + c$		
a 的符号	$a > 0$	$a < 0$
函数图象		
开口方向	向上	向下
对称轴	$x = -\frac{b}{2a}$	
顶点坐标	$(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a})$	
函数最值	有最小值 $\frac{4ac - b^2}{4a}$	有最大值 $\frac{4ac - b^2}{4a}$
	当定义域为全体实数时，函数的最小值或最大值是顶点 <u>纵</u> 坐标的值	
增减性	当 $x < -\frac{b}{2a}$ 时， y 随 x 的增大而 <u>减小</u>	当 $x < -\frac{b}{2a}$ 时， y 随 x 的增大而 <u>增大</u>
	当 $x > -\frac{b}{2a}$ 时， y 随 x 的增大而 <u>增大</u>	当 $x > -\frac{b}{2a}$ 时， y 随 x 的增大而 <u>减小</u>
开口大小	$ a $ 越大，开口 <u>越小</u> ； $ a $ 越小，开口 <u>越大</u> 。 在对称轴右侧，沿着逆时针方向， a 的值逐渐 <u>增大</u> 。	

【备注】一般式与顶点式可利用配方法进行转化：

$$y = ax^2 + bx + c = a \left[x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a} \right)^2 \right] - \frac{b^2}{4a} + c = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$

这部分中常根据二次函数增减性考察比较函数值大小：

开口向上，离对称轴越远函数值越大；开口向下，离对称轴越远函数值越小

📍 二次函数顶点式

二次函数顶点式为 $y = a(x - h)^2 + k$ ，对称轴为 $x = h$ ，顶点坐标为 (h, k)

🔔 二次函数交点式

$y = a(x - x_1)(x - x_2)$ 也是表示二次函数的一种解析式，叫作 **交点式**，其中 x_1, x_2 是方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的两根，即二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 图象与 x 轴交点的 **横** 坐标；对称轴为 $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$

【备注】 交点式求对称轴即求两个交点的中点坐标；

交点式求对称轴的方法可以拓展到二次函数上任意纵坐标相等的两点，如 $(m, 1)$ 、 $(n, 1)$ ，

对称轴为 $x = \frac{m + n}{2}$

栗子3

3. 2019~2020学年10月天津南开区天津市育贤中学初三上学期月考第2题3分 ★★

对于二次函数 $y = -\frac{1}{4}x^2 + x - 4$ ，下列说法正确的是（ ）。

- A. 当 $x > 0$ 时， y 随 x 的增大而增大 B. 当 $x = 2$ 时， y 有最大值 -3
C. 图象的顶点坐标为 $(-2, -7)$ D. 图象与 x 轴有两个交点

【答案】 B

【解析】 $\because$ 二次函数 $y = -\frac{1}{4}x^2 + x - 4$ 可化为 $y = -\frac{1}{4}(x - 2)^2 - 3$ ，

又 $\because a = -\frac{1}{4} < 0$ ，

$\therefore$ 当 $x = 2$ 时，二次函数 $y = -\frac{1}{4}x^2 + x - 4$ 的最大值为 -3 。

【标注】 【知识点】二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的增减性

4. 2019~2020学年9月天津南开区天津市育贤中学初三上学期月考第15题3分 ★★

如果二次函数 $y = x^2 + 3kx + 2k - 4$ 图象对称轴为直线 $x = 3$ ，那么二次函数的最小值是 _____。

【答案】 -17

【解析】 $\because$ 二次函数 $y = x^2 + 3kx + 2k - 4$ 图象对称轴为直线 $x = 3$ ，

$\therefore -\frac{3k}{2 \times 1} = 3$ ，得 $k = -2$ ，

$\therefore y = x^2 - 6x - 8 = (x - 3)^2 - 17$ ，

$\therefore$ 当 $x = 3$ 时， y 取得最小值，此时 $y = -17$ ，

故答案为： -17 。

【标注】 【知识点】实数范围内求二次函数最值

5. 2019~2020学年12月天津武清区天津市杨村第八中学初三上学期月考第7题 ★

对于二次函数 $y = (x - 1)^2 + 2$ 的图象，下列说法正确的是（ ）。

- A. 开口向下 B. 对称轴是 $x = -1$ C. 顶点坐标是 $(1, 2)$ D. 与 x 轴有两个交点

【答案】 C

【解析】 $y = (x - 1)^2 + 2$ ，由解析式可知图象开口向上，
对称轴为 $x = 1$ ，顶点坐标为 $(1, 2)$ ，
当 $y = 0$ ，有 $(x - 1)^2 = -2$ ，故方程无解，
即该函数图象与 x 轴无交点。

【标注】【知识点】二次函数 $y = a(x - h)^2 + k$ 的图象和性质

6. 2019~2020学年9月天津河西区佟楼中学初三上学期月考第4题3分 ★★

二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ，自变量 x 与函数 y 的对应值如表：

x	...	-5	-4	-3	-2	-1	0	...
y	...	4	0	-2	-2	0	4	...

下列说法中正确的是（ ）。

- A. 抛物线的开口向下 B. 当 $x > -3$ 时， y 随 x 的增大而增大
C. 二次函数的最小值是 -2 D. 抛物线的对称轴是 $x = -\frac{5}{2}$

【备注】 观察表格可发现两个特殊点 $(-3, -2)$ 、 $(-2, -2)$ ，则对称轴为 $\frac{-3 - 2}{2} = -\frac{5}{2}$

【答案】 D

【解析】 $\because$ 当 $x = -4$ 或 $x = -1$ 时， $y = 0$ ，当 $x = 0$ 时， $y = 4$ ，

$$\therefore \begin{cases} 16a - 4b + c = 0 \\ a - b + c = 0 \\ c = 4 \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} a = 1 \\ b = 5 \\ c = 4 \end{cases},$$

$$\therefore y = x^2 + 5x + 4 = \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{9}{4},$$

$\therefore$ 抛物线开口向上，对称轴为 $x = -\frac{5}{2}$ ，最小值为 $-\frac{9}{4}$ ，当 $x > -\frac{5}{2}$ 时， y 随 x 的增大而增大。

故选 D。

【标注】【知识点】实数范围内求二次函数最值

栗子4

7. 2019~2020学年10月天津河北区天津外国语大学附属外国语学校初三上学期月考第12题4分 ★★

若二次函数 $y = x^2 - 6x + c$ 的图象经过 $A(-1, y_1)$ 、 $B(2, y_2)$ 、 $C(3 + \sqrt{2}, y_3)$ 三点，则关于 y_1 、 y_2 、 y_3 大小关系正确的是 _____。

【备注】 比较函数值大小的解题思路：

先求出二次函数的对称轴，然后判断出点离对称轴的远近，根据开口方向比较函数值的大小（开口向上，离对称轴越远函数值越大；开口向下，离对称轴越远函数值越小）

【答案】 $y_1 > y_3 > y_2$

【解析】 根据二次函数图象的对称性可知， $C(3 + \sqrt{2}, y_3)$ 中， $|3 + \sqrt{2} - 3| > |3 - 2| = 1$ ，
 $A(-1, y_1)$ ， $B(2, y_2)$ 在对称轴的左侧， y 随 x 的增大而减小，因为 $-1 < 1 < 2$ ，于是
 $y_1 > y_3 > y_2$ 。故答案为： $y_1 > y_3 > y_2$ 。

【标注】 【知识点】二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的增减性

8. 2017~2018学年9月天津南开区天津市第二十五中学初三上学期月考第10题 ★★

已知抛物线 $y = a(x - 2)^2 + k$ ($a > 0$ ， a, k 为常数)， $A(-3, y_1)$ ， $B(3, y_2)$ ， $C(4, y_3)$ 是抛物线上三点，则 y_1 ， y_2 ， y_3 由小到大依序排列为 ()。

- A. $y_1 < y_2 < y_3$ B. $y_2 < y_1 < y_3$ C. $y_2 < y_3 < y_1$ D. $y_3 < y_2 < y_1$

【备注】 解题方法同上，这部分一定要注意好开口方向

【答案】 C

【解析】 抛物线 $y = a(x - 2)^2 + k$ ($a > 0$ ， a, k 为常数) 的对称轴为直线 $x = 2$ ，
所以 $A(-3, y_1)$ 到直线 $x = 2$ 的距离为 5， $B(3, y_2)$ 到直线 $x = 2$ 的距离为 1， $C(4, y_3)$ 到直线的距离为 2，
所以 $y_2 < y_3 < y_1$ 。
故选 C。

【标注】 【知识点】二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的增减性

9. 2017~2018学年天津河北区初三上学期中第10题3分 ★★★

已知两点 $M(-6, y_1)$ ， $N(2, y_2)$ 均在抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 上，点 $P(x_0, y_0)$ 是抛物线的顶点，若 $y_0 \leq y_2 < y_1$ ，则 x_0 的取值范围是 ()。

- A. $x_0 < -2$ B. $x_0 > -2$ C. $-6 < x_0 < -2$ D. $-2 < x_0 < 2$

【备注】 由顶点纵坐标小于函数值，可得开口向下， $a < 0$ ；将 M 、 N 代入到函数中，求出 a 、 b 的等量关系，求出对称轴的范围

【答案】 B

【解析】 $\because$ 点 $P(x_0, y_0)$ 是抛物线的顶点, $y_1 > y_2 \geq y_0$, $M(-6, y)$, $N(2, y_2)$,
 $\therefore$ 抛物线有最小值, 函数图象开口向上,
 $\therefore a > 0$, $\therefore 36a - 6b + c > 4a + 2b + c$,
 $\therefore -\frac{b}{2a} > -2$,
 $\therefore x_0 > -2$,
 故选 B.

【标注】 【知识点】利用二次函数解不等式问题

栗子5

10. 2017~2018学年10月天津和平区天津市双菱中学初三上学期月考第7题 ★★

已知二次函数 $y = x^2 + (m-1)x + 1$, 当 $x > 1$ 时, y 随 x 的增大而增大, 而 m 的取值范围是 ().

- A. $m = -1$ B. $m = 3$ C. $m \leq -1$ D. $m \geq -1$

【备注】 开口向上, 对称轴右侧满足 y 随 x 的增大而增大, 因此 $-\frac{m-1}{2} \leq 1$

【答案】 D

【解析】 $\because$ 当 $x > 1$ 时, y 随 x 增大而增大,
 $\therefore$ 对称轴在直线 $x = 1$ 左侧, 即 $-\frac{b}{2a} \leq 1$,
 又 $\because a = 1$, $b = m - 1$,
 $\therefore -\frac{m-1}{2} \leq 1$, 解得 $m \geq -1$.

【标注】 【知识点】二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的增减性

11. 2019~2020学年10月天津武清区天津市杨村第八中学初三上学期月考第10题3分 ★★★

若二次函数 $y = (x - k)^2$, 当 $x \leq 2$ 时, y 随 x 的增大而减小, 则 k 的取值范围为 ().

- A. $k > 2$ B. $k < 2$ C. $k \leq 2$ D. $k \geq 2$

【备注】 利用顶点式直接求出对称轴, 然后利用上述方法求参数范围;

讲解后教师可对题目进行改编; 若改为 $y = -(x - k)^2$, 当 $x \geq 2$ 时, y 随 x 的增大而减小, 则 k 的取值范围为_____.

答案: $k \leq 2$

【答案】 D

【解析】 $\because$ 二次函数的解析式为: $y = (x - k)^2$
 $\therefore$ 其对称轴方程 $x = k$.
 $\therefore$ 当 $x \leq 2$ 时, y 随 x 的增大而减小,

$\therefore x = 2$ 在对称轴的左侧或在对称轴上，

$\therefore k \geq 2$.

故选 D .

【标注】【知识点】二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的增减性

二、待定系数法求二次函数解析式

🔗 一般式

已知	已知抛物线过任意三点的坐标 (x_1, y_1) 、 (x_2, y_2) 、 (x_3, y_3) .
求解	设二次函数解析式为 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$, 分别代入三个点的坐标得三元一次方程组 , 求得参数值 , 代入一般式中 .
总结	① 任何二次函数都可以整理成一般式 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 的形式 . ② 已知抛物线上任意三点坐标 , 一般采用一般式求解二次函数解析式 .

【备注】将 3 点代入到二次函数解析式中得 :
$$\begin{cases} y_1 = ax_1^2 + bx_1 + c \\ y_2 = ax_2^2 + bx_2 + c \\ y_3 = ax_3^2 + bx_3 + c \end{cases}$$

🔗 顶点式

已知	已知抛物线的顶点坐标 (h, k) 和图象上其它任意一点 .
求解	设二次函数的解析式为 $y = a(x - h)^2 + k (a \neq 0)$, 再代入另一个点的坐标求出 a 的值 , 从而求得函数解析式 $y = a(x - h)^2 + k$.
总结	已知抛物线顶点坐标 , 一般采用顶点式求解二次函数解析式

【备注】利用顶点式求函数解析式时 , 可直接将顶点设在解析式中 ,
如顶点坐标为 $(1, 2)$, 则可设解析式为 $y = a(x - 1)^2 + 2$

交点式

已知	已知抛物线与 x 轴的两个交点 $(x_1, 0)$, $(x_2, 0)$ 和图象上其它任意一点 .
求解	设二次函数的解析式为 $y = a(x - x_1)(x - x_2) (a \neq 0)$, 再代入第三个点的坐标求出 a 的值 , 最后将交点式 $y = a(x - x_1)(x - x_2)$ 化简为 <u>一般式</u> .
总结	① 已知 <u>抛物线与 x 轴的两个交点</u> , 一般采用交点式求解二次函数解析式 . ② 已知对称轴和抛物线与 x 轴的一个交点 , 利用对称性先求出抛物线与 x 轴的 <u>另一个交点</u> , 再采用交点式求解二次函数解析式 .

! 注意 :

用交点式求解析式后一定要化简成 一般式 或 顶点式 .

【备注】 已知二次函数与 x 轴的两个交点坐标 , 也可直接设函数解析式

如 : 已知二次函数与 x 轴两个交点坐标为 $(-3, 0)$ 、 $(1, 0)$,

则可设二次函数解析式为 $y = a(x + 3)(x - 1)$

栗子6

12. 2015~2016学年10月天津和平区天津市第二十一中学初三上学期月考第20题8分 ★★

已知抛物线经过点 $(3, 14)$, $(1, 4)$, $(2, 7)$ 三点 , 求抛物线解析式 .

【答案】 $y = 2x^2 - 3x + 5$.

【解析】 设抛物线解析式为 $y = ax^2 + bx + c$,

$$\text{根据题意得 } \begin{cases} 9a + 3b + c = 14 \\ a + b + c = 4 \\ 4a + 2b + c = 7 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} a = 2 \\ b = -3 \\ c = 5 \end{cases}$$

所以抛物线解析式为 $y = 2x^2 - 3x + 5$.

【标注】 【知识点】 二次函数一般式

13. 2017~2018学年9月天津河北区天津市汇森中学初三上学期月考第19题8分 ★★

已知二次函数的图象的顶点坐标为 $(-2, -3)$, 且图象经过点 $(-3, -1)$, 求这个二次函数的解析式 .

【答案】 $y = 2(x + 2)^2 - 3$.

【解析】 设解析式为 : $y = a(x + 2)^2 - 3$,

将 $(-3, -1)$ 代入得出 : $-1 = a(-3 + 2)^2 - 3$,

解得： $a = 2$ ，

故这个二次函数的解析式为： $y = 2(x + 2)^2 - 3$ 。

【标注】【知识点】二次函数顶点式

14. 2017~2018学年10月天津和平区天津市汇文中学初三上学期月考第23题 ★★

抛物线过 $(-1, 0)$ ， $(3, 0)$ ， $(1, -5)$ 三点，求二次函数的解析式。

【答案】 $y = \frac{5}{4}x^2 - \frac{5}{2}x - \frac{15}{4}$ 。

【解析】 设抛物线的解析式为 $y = a(x + 1)(x - 3)$ ，把 $(1, -5)$ 代入解析式得 $a = \frac{5}{4}$ ，
所以所求抛物线的解析式为 $y = \frac{5}{4}x^2 - \frac{5}{2}x - \frac{15}{4}$ 。

【标注】【知识点】二次函数一般式

三、二次函数的几何变换

1. 二次函数的平移

二次函数平移口诀：上加下减，左加右减，上下平移在末梢，左右平移在括号

	$y = ax^2 + bx + c$	$y = a(x - h)^2 + k$
上下平移 n 的单位的解析式	$y = ax^2 + bx + c \pm n$	$y = a(x - h)^2 + k \pm n$
左右平移 m 的单位的解析式	$y = a(x \pm m)^2 + b(x \pm m) + c$	$y = a(x - h \pm m)^2 + k$

【备注】这部分在利用一般式进行左右平移时，学生易出错，要熟记左右平移时，所有的 x 都要进行加减；如果这部分经常错，那就让学生先将一般式转化为顶点式，然后再利用顶点式进行平移

栗子7

15. 2020~2021学年天津河东区初三上学期期中（第三学区片）第8题 ★★

将抛物线 $y = -\frac{1}{2}(x + 1)^2$ 向右平移 3 个单位，再向下平移 2 个单位，得到抛物线解析式为（ ）。

A. $y = -\frac{1}{2}(x + 4)^2 - 2$
C. $y = -\frac{1}{2}(x - 2)^2 - 2$

B. $y = -\frac{1}{2}(x - 2)^2 + 2$
D. $y = -\frac{1}{2}(x + 4)^2 + 2$

【答案】 C

【解析】 上加下减常数项，左加右减自变量，

$$\text{平移后的抛物线为 } y = -\frac{1}{2}(x+1-3)^2 - 2 = -\frac{1}{2}(x-2)^2 - 2 .$$

故选 C .

【标注】 【知识点】 二次函数平移变换

16. 2020~2021学年天津武清区英华国际中学初三上学期期中第7题3分 ★★

抛物线 $y = x^2 + 6x + 7$ 可由抛物线 $y = x^2$ 如何平移得到的 () .

- A. 先向左平移 3 个单位，再向下平移 2 个单位 B. 先向左平移 6 个单位，再向上平移 7 个单位
C. 先向上平移 2 个单位，再向左平移 3 个单位 D. 先向右平移 3 个单位，再向上平移 2 个单位

【答案】 A

【解析】 因为 $y = x^2 + 6x + 7 = (x+3)^2 - 2$.

所以将抛物线 $y = x^2$ 先向左平移 3 个单位，再向下平移 2 个单位即可得到抛物线

$$y = x^2 + 6x + 7 .$$

故选 A .

【标注】 【知识点】 二次函数平移变换

栗子8

17. 2016~2017学年天津河西区初三上学期期中第12题3分 ★★

若抛物线 $y = x^2 - 2x + 3$ 不动，将平面直角坐标系 xOy 先沿水平方向向右平移一个单位，再沿铅直方向向上平移三个单位，则原抛物线图象的解析式应变为 () .

- A. $y = (x-2)^2 + 3$ B. $y = (x-2)^2 + 5$ C. $y = x^2 - 1$ D. $y = x^2 + 4$

【备注】 平移平面直角坐标系，相当于函数进行反向平移；

此题可转化为将二次函数向左平移 1 个单位，向下平移 3 个单位

【答案】 C

【解析】 将平面直角坐标系 xOy 先沿水平方向向右平移一个单位，再沿铅直方向向上平移三个单位，相当于把抛物线向左平移一个单位，再向下平移三个单位，

$$\therefore y = (x-1)^2 + 2 ,$$

$$\therefore \text{原抛物线图象的解析式应变为 } y = (x-1+1)^2 + 2 - 3 = x^2 - 1 .$$

【标注】 【知识点】 二次函数平移变换

18. 2020~2021学年10月天津和平区天津市双菱中学初三上学期月考第10题 ★★★

已知二次函数 $y = x^2 - 2mx + m^2 + 3$ (m 是常数), 把该函数的图象沿 y 轴平移后, 得到的函数图象与 x 轴只有一个公共点, 则应把该函数的图象 ().

- A. 向上平移 3个单位 B. 向下平移 3个单位 C. 向上平移 1个单位 D. 向下平移 1个单位

【答案】 B

【解析】 $y = x^2 - 2mx + m^2 + 3 = (x - m)^2 + 3$,

把函数 $y = (x - m)^2 + 3$ 的图象沿 y 轴向下平移 3个单位长度后, 得到函数 $y = (x - m)^2$ 的图象, 它的顶点坐标是 $(m, 0)$,

因此, 这个函数的图象与 x 轴只有一个公共点,

所以, 把函数 $y = x^2 - 2mx + m^2 + 3$ 的图象沿 y 轴向下平移 3个单位长度后, 得到的函数的图象与 x 轴只有一个公共点.

【标注】 【知识点】 二次函数平移变换

19. 2018~2019学年天津和平区初三上学期期中第10题2分 ★★

已知平面直角坐标系中有两个二次函数 $y = a(x + 1)(x + 7)$ 及 $y = b(x + 1)(x - 15)$ 的图象, 将二次函数 $y = b(x + 1)(x - 15)$ 的图象依下列哪一种平移方式后, 会使得此两图象对称轴重叠 ().

- A. 向左平移 4个单位长度 B. 向右平移 4个单位长度
C. 向左平移 11个单位长度 D. 向右平移 11个单位长度

【备注】 题中给出的两个函数解析式均为交点式, 可直接利用交点求出对称轴

【答案】 C

【解析】 $\because y = a(x + 1)(x + 7) = ax^2 + 8ax + 7a$, $y = b(x + 1)(x - 15) = bx^2 - 14bx - 15b$,

$\therefore$ 二次函数 $y = a(x + 1)(x + 7)$ 的对称轴为直线 $x = -4$, 二次函数 $y = b(x + 1)(x - 15)$ 的对称轴为直线 $x = 7$,

$\therefore -4 - 7 = -11$,

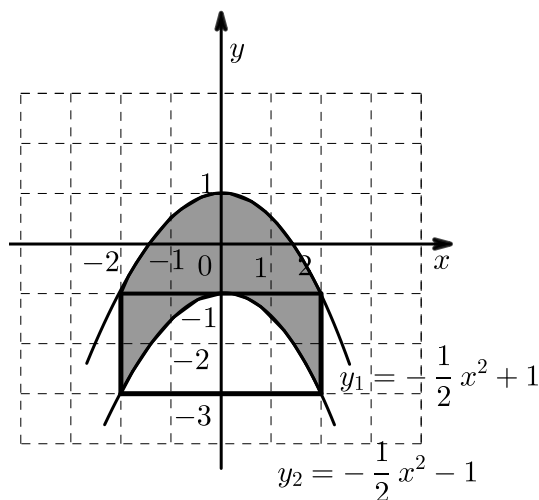
$\therefore$ 将二次函数 $y = b(x + 1)(x - 15)$ 的图形向左平移 11个单位, 两图形的对称轴重叠.

【标注】 【知识点】 二次函数平移变换

【能力】 运算能力

20. 2019~2020学年10月天津南开区天津市津英中学初三上学期月考第15题3分 ★★★

如图，两条抛物线 $y_1 = -\frac{1}{2}x^2 + 1$ 与 $y_2 = -\frac{1}{2}x^2 - 1$ 与分别经过点 $(-2, 0)$ ， $(2, 0)$ 且平行于 y 轴的两条平行线围成的阴影部分的面积为 _____ .



【答案】 8

【解析】 过抛物线 $y_2 = -\frac{1}{2}x^2 - 1$ 顶点 $(0, -1)$ 作平行于 x 轴的直线与抛物线 $y_1 = -\frac{1}{2}x^2 + 1$ 围成的阴影，同过点 $(0, -3)$ 作平行线于 x 轴的直线与 $y_2 = -\frac{1}{2}x^2 - 1$ 围成的圆形形状相同，故把阴影部分向下平移 2 个单位即可拼成一个矩形， $S_{\text{矩}} = 4 \times 2 = 8$.

【标注】 【知识点】 二次函数平移变换

【能力】 推理论证能力

2. 二次函数的对称

二次函数关于坐标轴对称口诀： 关于谁谁不变，另一个变相反，关于原点都要变

	$y = ax^2 + bx + c$	$y = a(x - h)^2 + k$
关于 x 轴对称	$y = -ax^2 - bx - c$	$y = -a(x - h)^2 - k$
关于 y 轴对称	$y = ax^2 - bx + c$	$y = a(x + h)^2 + k$
关于原点对称	$y = -ax^2 + bx - c$	$y = -a(x + h)^2 - k$

二次函数的特殊对称：

①关于直线 $y = m$ 对称

$y = a(x - h)^2 + k$ 关于直线 $y = m$ 对称，开口大小 不变，方向 改变， a 变成 $-a$ ，把顶点 (h, k) 关于直线 $y = m$ 对称变成 $(h, 2m - k)$ ，所以新的解析式为 $y = -a(x - h)^2 + 2m - k$.

②关于直线 $x = n$ 对称

$y = a(x - h)^2 + k$ 关于直线 $x = n$ 对称，开口大小 不变，方向 不变， a 变成 $-a$ ，把顶点 (h, k) 关于直线 $x = n$ 对称变成 $(2n - h, k)$ ，所以新的解析式为 $y = a(x - 2n + h)^2 + k$

【备注】 关于特殊直线对称，即顶点坐标关于该直线对称，因此先求出顶点坐标的对称点，然后根据开口方向是否变化，直接写出函数解析式

栗子11

21. 2017~2018学年10月天津和平区天津市耀华中学初三上学期月考第8题3分 ★★

在平面直角坐标系中，先将抛物线 $y = x^2 + x - 2$ 关于 x 轴作轴对称变换，再将所得的抛物线关于 y 轴作轴对称变换，那么经两次变换后所得的新抛物线的解析式为（ ）.

- A. $y = -x^2 - x + 2$ B. $y = -x^2 + x - 2$ C. $y = -x^2 + x + 2$ D. $y = x^2 + x + 2$

【答案】 C

【解析】 先将抛物线 $y = x^2 + x - 2$ 关于 x 轴对称变换，可得新抛物线为 $y = -x^2 - x + 2$ ；再将所得的抛物线 $y = -x^2 - x + 2$ 关于 y 轴作轴对称变换，可得新抛物线为 $y = -x^2 + x + 2$.
故答案为： $y = -x^2 + x + 2$.

【标注】 【知识点】二次函数图象关于坐标轴对称

栗子12

22. 2015年天津和平区初三中考一模第11题3分 ★★

将抛物线 $C: y = x^2 + 3x - 10$ ，将抛物线 C 平移到抛物线 C' . 若两条抛物线 C ，抛物线 C' 关于直线 $x = 1$ 对称，则下列平移方法中正确的是（ ）.

- A. 将抛物线 C 向右平移 $\frac{5}{2}$ 个单位 B. 将抛物线 C 向右平移 3 个单位
C. 将抛物线 C 向右平移 5 个单位 D. 将抛物线 C 向右平移 6 个单位

【答案】 C

【解析】 抛物线 $C: y = x^2 + 3x - 10$ 的对称轴为直线 $x = \frac{b}{-2a} = -\frac{3}{2}$ ，
若两条抛物线 C ， C' 关于直线 $x = 1$ 对称，
则平移后 C' 关于直线 $x = \frac{7}{2}$ 对称，
故将抛物线 C 向右平移 5 个单位.

【标注】 【知识点】二次函数关于平行坐标轴的直线对称

3. 二次函数的旋转

①绕顶点旋转 180°

$y = a(x - h)^2 + k$ 绕顶点旋转 180° ，开口大小 不变，方向 改变， a 变成 $-a$ ，顶点 (h, k) 不变，所以新的解析式为 $y = -a(x - h)^2 + k$ 。

②绕某点 (m, n) 旋转 180°

$y = a(x - h)^2 + k$ 绕点 (m, n) 旋转 180° ，开口大小 不变，方向 改变， a 变成 $-a$ ，把顶点 (h, k) 先关于 (m, n) 变成 $(2m - h, 2n - k)$ ，所以新的解析式为 $y = -a(x - 2m + h)^2 + 2n - k$ 。

【备注】 二次函数旋转问题也可理解为关于该点对称；

求解的整体思路均为求顶点的对称点然后再根据开口方向的变化情况，写出函数解析式

栗子13

23. 2016~2017学年10月天津和平区天津市第一中学初三上学期月考第9题3分 ★★★

将抛物线 $y = 2x^2 - 12x + 16$ 绕它的顶点旋转 180° ，所得抛物线的解析式是（ ）。

A. $y = -2x^2 - 12x + 16$

B. $y = -2x^2 + 12x - 16$

C. $y = -2x^2 + 12x - 20$

D. $y = -2x^2 + 12x - 19$

【答案】 C

【解析】 分析：先利用配方法得到抛物线 $y = 2x^2 - 12x + 16$ 的顶点坐标为 $(3, -2)$ ，由于抛物线 $y = 2x^2 - 12x + 16$ 绕它的顶点旋转 180° ，则旋转后的抛物线只开口相反，于是可根据顶点式写出新抛物线解析式。

$$\because y = 2x^2 - 12x + 16 = 2(x - 3)^2 - 2,$$

$$\therefore \text{抛物线 } y = 2x^2 - 12x + 16 \text{ 的顶点坐标为 } (3, -2)$$

$$\therefore \text{抛物线 } y = 2x^2 - 12x + 16 \text{ 绕它的顶点旋转 } 180^\circ,$$

$$\therefore \text{新抛物线的解析式为 } y = -2(x - 3)^2 - 2 = -2x^2 + 12x - 20.$$

【标注】 【知识点】二次函数图象关于任意点对称

栗子14

24. ★★★

已知抛物线 $y = x^2 - 5x + 2$ 与 $y = ax^2 + bx + c$ 关于点 $(3, 2)$ 对称，则 $3a + 3c + b = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【答案】 -8

【标注】 【知识点】二次函数图象关于任意点对称

